Descrevendo Circuitos Lógicos (Continuação)

Teoremas Booleanos

CPCX – UFMS

Slides: Prof. Renato F. dos Santos

Adaptação: Prof. Fernando Maia da Mota

3.10 Teoremas booleanos

- **Investigaremos os vários teoremas (regras) denominados *teoremas booleanos***
- **Poderão ajudar a simplificar expressões lógicas e circuitos lógicos**
- **Em cada teorema *x* é uma variável lógica que pode ser 0 ou 1**
- **Cada teorema está acompanhado de um circuito lógico que demonstra sua validade**

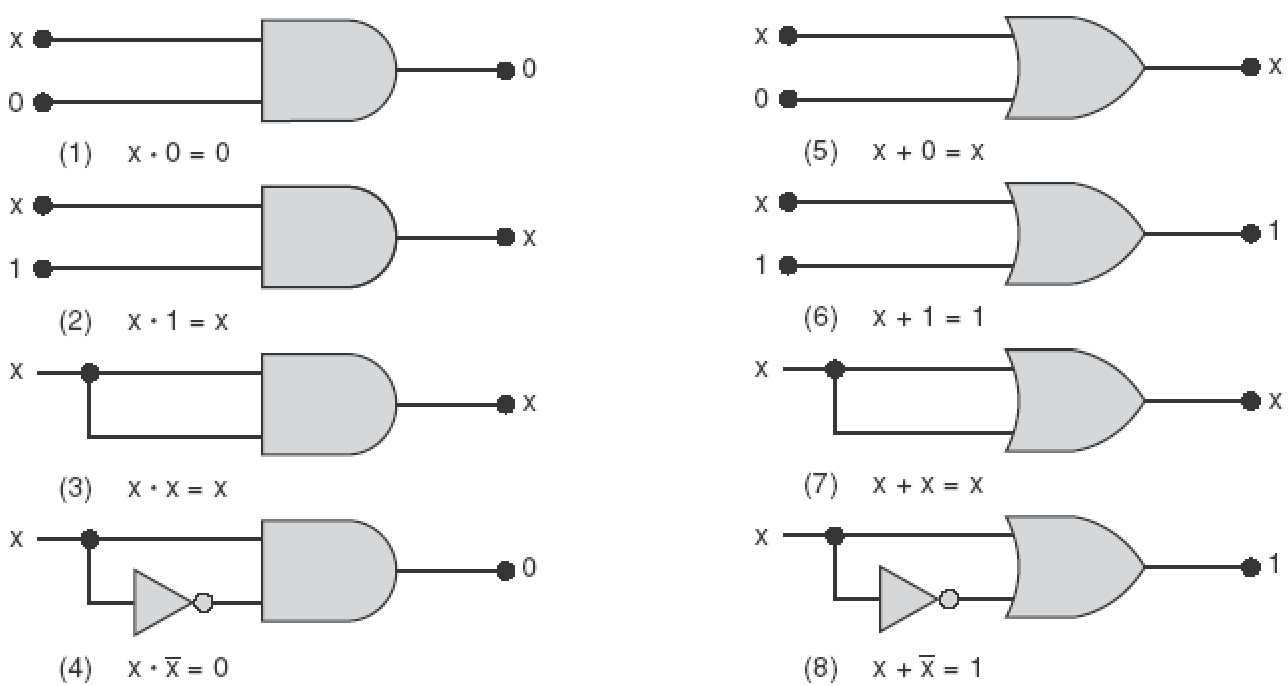

FIGURA 3.25
Teoremas para uma única variável.

3.10 Teoremas booleanos (Continuação)

- **Teoremas**

1. **Se for realizada uma operação AND de qualquer variável com 0, o resultado tem de ser 0.**
2. **Também é obvio se fizermos a comparação com a multiplicação convencional**
3. **Pode ser provado testando cada caso. Se $x = 0$, então $0 \cdot 0 = 0$; se $x = 1$, então $1 \cdot 1 = 1$. Portanto, $x \cdot x = x$.**
4. **Pode-se argumentar que em qualquer momento a variável x ou seu inverso $\overline{x}$ deve ser nível 0, então o produto lógico AND tem de ser 0.**
5. **É simples, visto que 0 somado a qualquer valor não afeta esse valor, tanto na adição convencional como na lógica.**

3.10 Teoremas booleanos (Continuação)

6. **Se realizada uma operação OR de qualquer variável com 1, o resultado sempre será 1.**
7. **Pode ser provado pelo teste dos dois valores de x: 0 + 0 = 0 e 1 + 1 = 1.**
8. **Pode ser provado de maneira parecida, ou podemos argumentar em qualquer instante x ou $\overline{x}$ tem de ser nível 1, de modo que sempre estaremos fazendo uma operação OR entre 0 e 1 que sempre resultará em 1.**

3.10 Teoremas booleanos (Continuação)

- Vale ressaltar que, quando os teoremas de 1 a 8 são aplicados, a variável x pode realmente representar uma expressão que contém mais de uma variável
- Por exemplo, se tivéssemos a expressão $A\bar{B}(\overline{A\bar{B}})$, poderíamos aplicar o teorema 4, fazendo $x = A\bar{B}$
- Assim, podemos dizer que $A\bar{B}(\overline{A\bar{B}}) = 0$
- A mesma idéia pode ser usada em qualquer um desses teoremas

Teoremas com mais de uma variável

9. $x + y = y + x$

10. $x \cdot y = y \cdot x$

11. $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$

12. $x(yz) = (xy)z = xyz$

13. a) $x(y + z) = xy + xz$

    b) $(w + x)(y + z) = wy + xy + wz + xz$

14. $x + xy = x$

15. a) $x + \overline{x}y = x + y$

    b) $\overline{x} + xy = \overline{x} + y$

Teoremas com mais de uma variável (Continuação)

- **Os teoremas 9 e 10 são chamados de leis comutativas as quais mostram que a ordem em que as variáveis aparecem nas operações OR e AND não importa; o resultado é o mesmo**
- **O teoremas 11 e 12 são as leis associativas, que dizem que podemos agrupar as variáveis em expressões AND ou OR do modo que desejarmos**
- **O teorema 13 é a lei distributiva, que diz que uma expressão pode ser expandida multiplicando termo a termo, da mesma maneira que na álgebra convencional. Esse teorema também indica que podemos colocar em evidência termos comuns em uma expressão. Por exemplo a expressão $A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ podemos colocar em evidência a variável B:**
  - $A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{B}(AC + \overline{A}\,\overline{C})$

Teoremas com mais de uma variável (Continuação)

– **Considere, como outro exemplo, a expressão *ABC* + *ABD*. Aqui os dois termos têm as variáveis *A* e *B* em comum; assim, *A* . *B* pode ser colocado em evidência. Ou seja,**
  - $ABC + ABD = AB(C + D)$

– **Os teoremas de 9 a 13 são fáceis de lembrar e usar, pois são idênticos aos da álgebra convencional. Os teoremas 14 e 15, por outro lado, não possuem equivalentes na álgebra convencional. Cada um pode ser demonstrado, testando todas as possibilidades para *x* e *y*.**

Teoremas com mais de uma variável (Continuação)

– **Tabela de análise para a equação *x* + *xy*:**

x	y	xy	x + xy
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

– **Observe que o valor da expressão toda (*x* + *xy*) é sempre igual a *x*.**

Teoremas com mais de uma variável (Continuação)

- **O teorema 14 também pode ser provado, evidenciando variáveis e usando os teoremas 6 e 2 da seguinte maneira:**

  - $x + xy = x(1 + y)$ **[Usando o teorema 6]**

    $= x \,.\, 1$ **[Usando o teorema 2]**

    $= x$

- **Os teoremas booleanos podem ser úteis na simplificação expressões lógicas, ou seja, na redução de termos em uma expressão**
- **Quando isso acontece, a expressão reduzida produz um circuito menos complexo do que o produzido pela expressão original**

Exemplo 3.13

– **Simplifique a expressão $y = A\overline{B}D + A\overline{B}\overline{D}$.**

Solução

Colocando em evidência as variáveis comuns, $A\overline{B}$, usando o teorema 13, temos:

$$y = A\overline{B}(D + \overline{D})$$

Usando o teorema 8, o termo entre parênteses é equivalente a 1. Assim,

$$y = A\overline{B} \cdot 1$$

$$= A\overline{B} \qquad \text{[Usando o teorema 2]}$$

Exemplo 3.14

– **Simplifique a expressão $z = (\overline{A} + B)(A + B)$.**

Solução

A expressão pode ser expandida, multiplicando os termos [teorema 13]:

$$z = \overline{A} \cdot A + \overline{A} \cdot B + B \cdot A + B \cdot B$$

Aplicando o teorema 4, o termo $\overline{A} \cdot A = 0$. Além disso, $B \cdot B = B$ [teorema 3]:

$$z = 0 + \overline{A} \cdot B + B \cdot A + B = \overline{A}B + AB + B$$

Colocando em evidência a variável B [teorema 13], temos:

$$z = B(\overline{A} + A + 1)$$

Finalmente, usando os teoremas 2 e 6, temos:

$$z = B$$

Exemplo 3.15

– **Simplifique $x = ACD + \overline{A}BCD$.**

Solução

Colocando em evidência os termos comuns CD, temos:

$$x = CD(A + \overline{A}B)$$

Usando o teorema 15a, podemos substituir $A + \overline{A}B$ por $A + B$. Assim,

$$\begin{aligned} x &= CD(A + B) \\ &= ACD + BCD \end{aligned}$$