Descrevendo Circuitos Lógicos (Continuação)

CPCX – UFMS

Slides: Prof. Renato F. dos Santos

Adaptação: Prof. Fernando Maia da Mota

3.11 Teoremas de DeMorgan

- **Demorgan, foi um grande matemático, tendo contribuído como dois dos mais importantes teoremas da álgebra booleana**
- **Extremamente úteis na simplificação de expressões nas quais um produto ou soma de variáveis aparecem negados (barrados)**
- **Os dois teoremas são:**

16. $(\overline{x + y}) = \overline{x} \cdot \overline{y}$

17. $(\overline{x \cdot y}) = \overline{x} + \overline{y}$

3.11 Teoremas de DeMorgan (Continuação)

– **O teorema 16 diz que, quando a soma lógica (OR) de duas variáveis é invertida, é o mesmo que inverter cada variável individualmente e, em seguida, fazer a operação AND entre as variáveis invertidas**
– **O teorema 17 diz que, quando o produto lógico (AND) de duas variáveis é invertido, é o mesmo que inverter cada variável individualmente e, em seguida, fazer a operação OR entre elas.**
– **Esses teoremas são igualmente válidos para situações em que *x* e/ou *y* são expressões que contêm mais de uma variável**
– **Por exemplo, vamos aplicá-lo na expressão ($\overline{A\overline{B} + C}$), conforme mostrado a seguir:**

3.11 Teoremas de DeMorgan (Continuação)

- $\overline{(A\overline{B} + C)} = \overline{(A\overline{B})} \,.\, \overline{C}$

– **O resultado pode ser ainda mais simplificado, visto que temos um produto $A\overline{B}$ que é invertido [Teorema 17]**

- $\overline{A\overline{B}} \,.\, \overline{C} = (\overline{A} + \overline{\overline{B}}) \,.\, \overline{C}$

– **Observe que podemos substituir $\overline{\overline{B}}$ por B, de modo que teremos finalmente:**

- $(\overline{A} + B) \,.\, \overline{C} = \overline{A}\,\overline{C} + B\overline{C}$

Exemplo 3.16

– **Simplifique a expressão $z = \overline{(\bar{A} + C)(B + \bar{D})}$ para que ela tenha apenas variáveis simples invertidas.**

Solução

Usando o teorema (17) e considerando $(\bar{A} + C)$ como x, e $(B + \bar{D})$ como y, temos:

$$z = \overline{(\bar{A} + C)} + \overline{(B + \bar{D})}$$

Podemos pensar sobre essa operação como sendo a quebra de uma barra grande ao meio e a troca do sinal AND (.) pelo sinal OR (+). Agora o termo $\overline{(\bar{A} + C)}$ pode ser simplificado aplicando o teorema (16). Do mesmo modo, $\overline{(B + \bar{D})}$ também pode ser simplificado:

Exemplo 3.16 (Continuação)

$$z = (\overline{\overline{A} + C}) + (\overline{B + \overline{D}})$$

$$= (\overline{\overline{A}} \,.\, \overline{C}) + \overline{B} \,.\, \overline{\overline{D}}$$

– **Nesse caso, partimos a barra grande ao meio e substituímos o sinal (+) por (.). Cancelando as duplas inversões, temos:**

$$z = A\overline{C} + \overline{B}D$$

Implicações dos teoremas de DeMorgan

- **Vamos analisar os teoremas 16 e 17 do ponto de vista dos circuitos lógicos**
- **Considere o teorema 16,**
  - $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
- **O lado esquerdo da equação pode ser visto como a saída de uma porta NOR**
- **O lado direito, é o resultado da inversão das variáveis *x* e *y* colocadas nas entradas de uma porta AND**

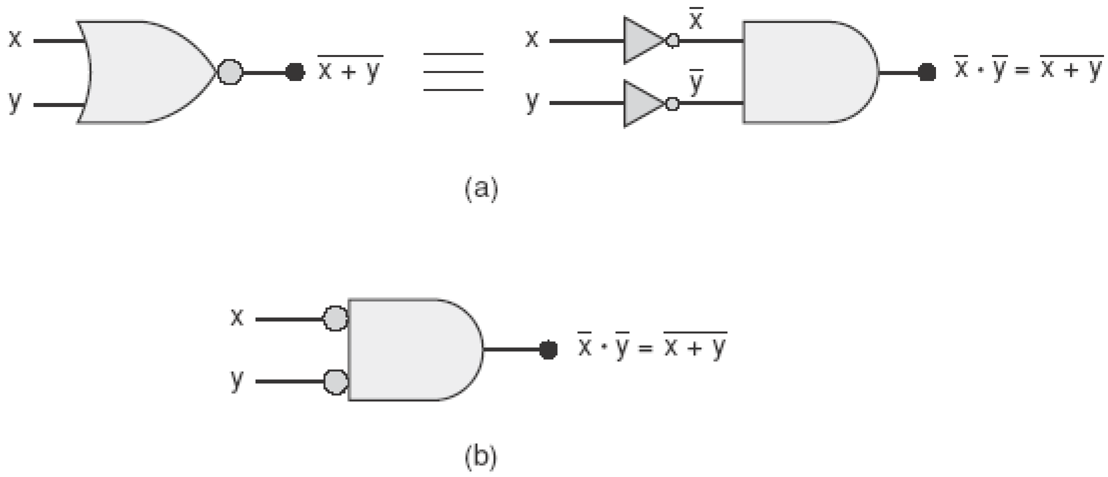


FIGURA 3.26
(a) Circuitos equivalentes relativos ao teorema (16);
(b) Símbolo alternativo para a função NOR.

Implicações dos teoremas de DeMorgan

- **Considere o teorema 17,**
  - $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$
- **O lado esquerdo da equação pode ser implementado por uma porta NAND**
- **O lado direito, pode ser implementado invertendo as entradas *x* e *y* primeiro e colocando-as nas entradas de uma porta OR**

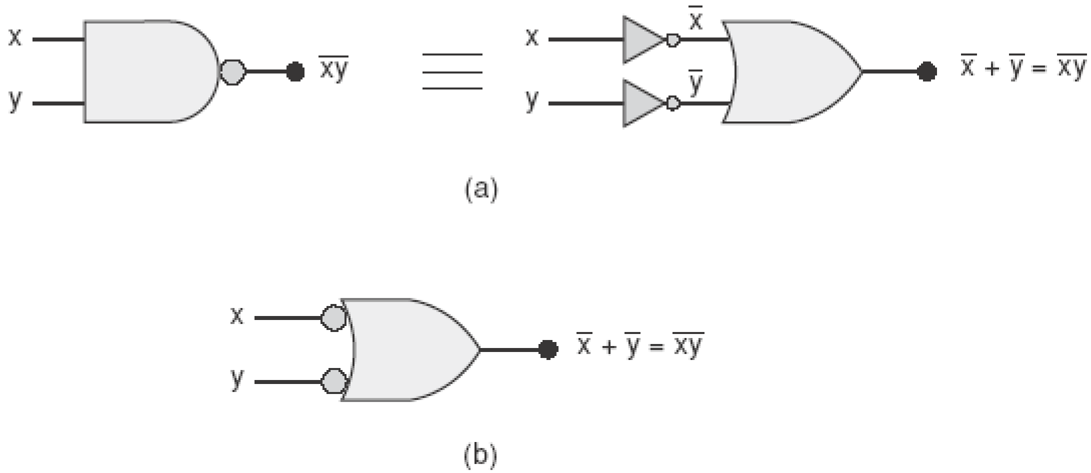


FIGURA 3.27
(a) Circuitos equivalentes relativos ao teorema (17);
(b) Símbolo alternativo para a função NAND.

Exemplo 3.17

– **Determine a expressão de saída para o circuito da Figura 3.28 e simplifique-a usando os teoremas de DeMorgan.**

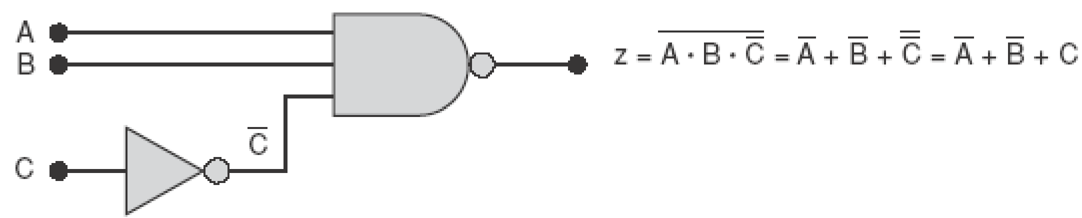


FIGURA 3.28
Exemplo 3.17.

Solução

– **A expressão para z é $z = \overline{AB\overline{C}}$. Usando o teorema de DeMorgan para partir a barra maior, temos:**

$$z = \overline{A} + \overline{B} + \overline{\overline{C}}$$

– **Cancelando a dupla inversão sobre a variável C, temos:**

$$z = \overline{A} + \overline{B} + C$$

3.12 Universalidade das portas NAND e NOR

- **Todas as expressões booleanas consistem em várias combinações das operações básicas OR, AND e INVERSOR**
- **Qualquer expressão pode ser implementada usando apenas essas portas**
- **Também é possível implementar qualquer expressão usando apenas portas NAND**
- **Isso porque as portas NAND, em combinações apropriadas, podem ser usadas para implementar qualquer uma das operações booleanas**

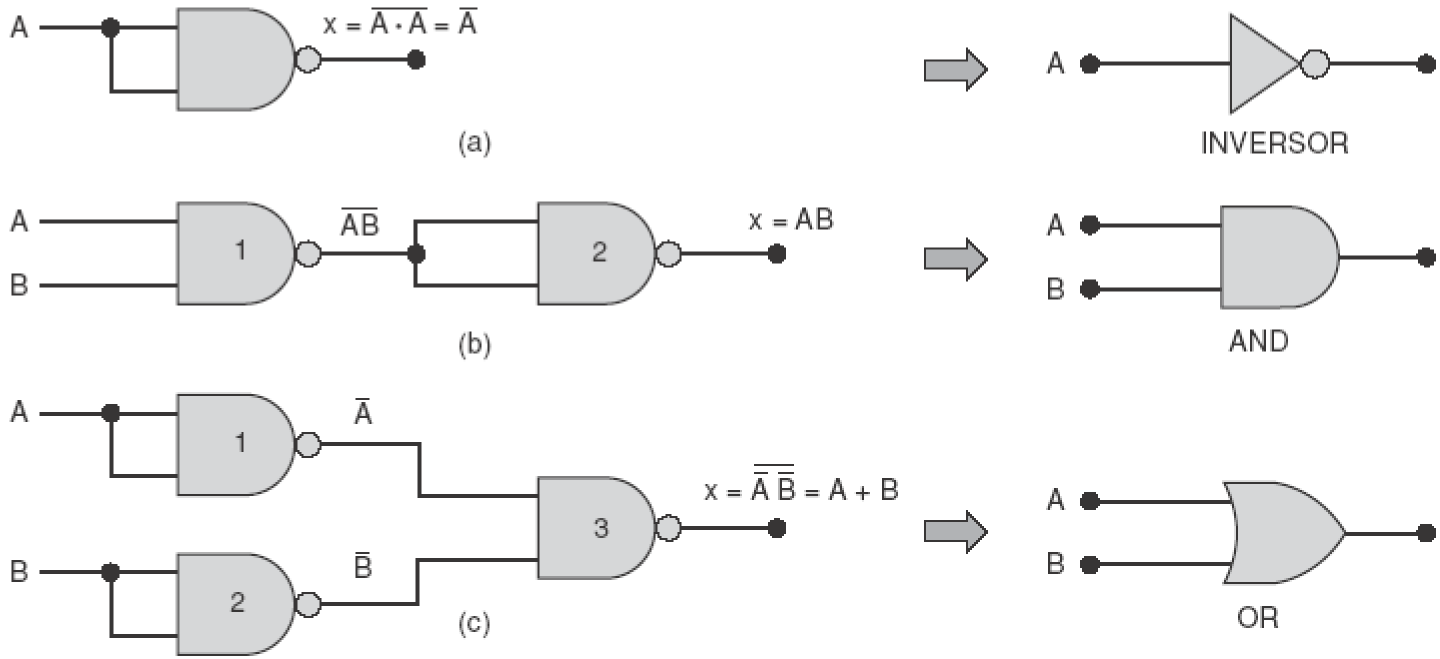


FIGURA 3.29
As portas NAND podem ser usadas para implementar qualquer função booleana.

3.12 Universalidade das portas NAND e NOR (Continuação)

- **De modo similar, as portas NOR podem ser associadas para implementar qualquer operação booleana**

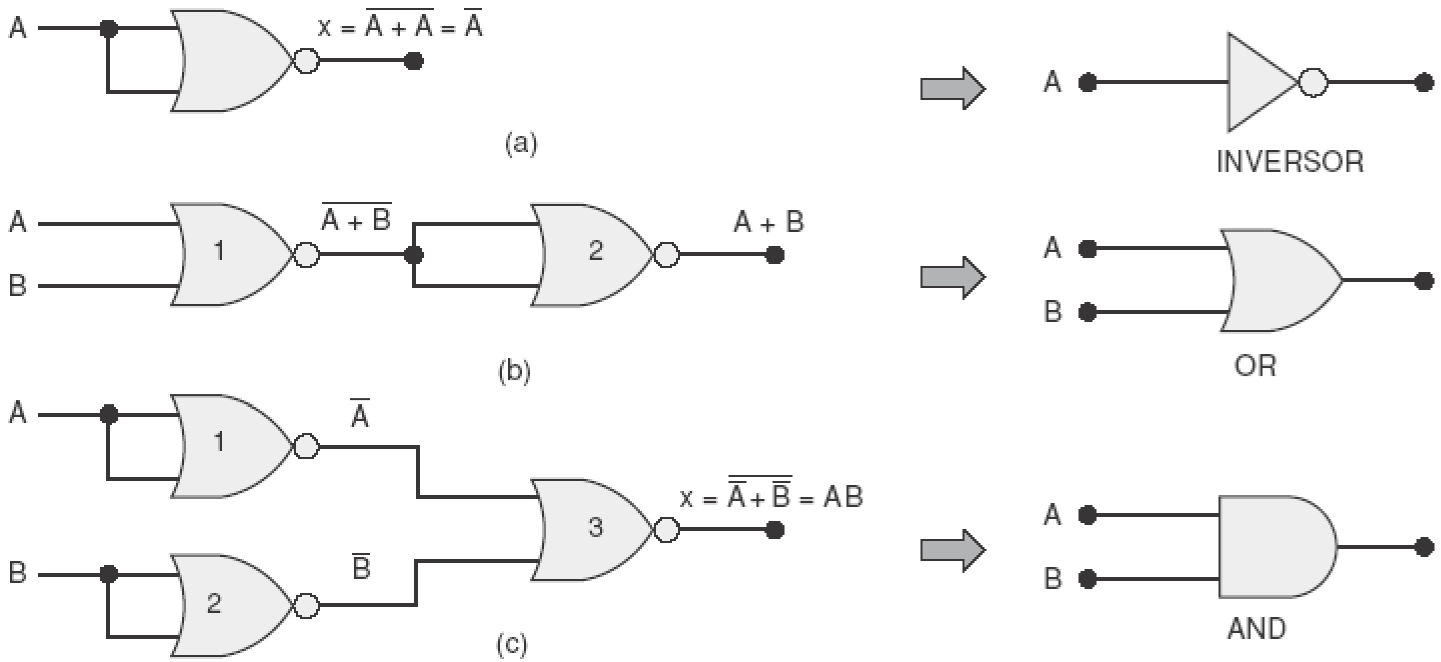


FIGURA 3.30
As portas NOR podem ser usadas para implementar qualquer operação booleana.

Exercícios

1. **Crie os circuitos lógicos das expressões a seguir usando um simulador de sua preferência, para este exercício utilize da universalidade das portas NAND.**

   a) $\overline{A}B+(CD)$

   b) $(A+C)(C+D)$

   c) $(\overline{A+B})\,(CD)$

2. **Crie os circuitos lógicos das expressões a seguir usando um simulador de sua preferência, para este exercício utilize da universalidade das portas NOR.**

   a) $\overline{A}B+(CD)$

   b) $(A+C)(C+D)$

   c) $(\overline{A+B})\,(CD)$

3. **Simplifique as expressões a seguir utilizando os teoremas de Demorgan.**

   a) $\overline{((B+A)+(DC))}+(AD)$

   b) $\overline{((BD).(A+C))}\,(B)$

   c) $\overline{(A+D)}+(\overline{A}D)$

3.16 Resumo de métodos para descrever circuitos lógicos

- **Os tópicos abordados nesse capítulo até aqui centram-se em apenas três funções lógicas simples AND, OR e NOT.**
- **Não são conceitos novos para ninguém, porque todos usamos essas funções lógicas todos os dias ao tomarmos decisões. Exemplos:**
  - ***Se está chovendo OU (OR) se o jornal diz que irá chover, então eu levarei o guarda-chuva.***
  - ***Se eu receber meu pagamento hoje E (AND) for ao banco, então terei dinheiro para gastar à noite***
  - ***Se eu tiver uma nota satisfatória na prova escrita E (AND) NÃO (NOT) for mal no trabalho, vou passar em Sistemas Digitais***

3.16 Resumo de métodos para descrever circuitos lógicos (Continuação)

– **Por que nos esforçamos tanto para descrever conceitos tão familiares**
  - ***Precisamos saber representar essas decisões lógicas.***
  - ***Precisamos saber combinar essas funções lógicas e implementar um sistema de tomada de decisões.***

– **Aprendemos como representar cada uma das funções lógicas básicas usando:**
  - **Sentenças lógicas em nossa própria língua.**
  - **Tabelas-verdade.**
  - **Expressões de álgebra booleana.**
  - **Diagramas de tempo.**

Exemplo 3.24

As seguintes expressões descrevem o modo como um circuito lógico precisa operar a fim de acionar um indicador de alerta de cinto de segurança em um carro.

Se o motorista estiver presente E NÃO estiver usando cinto, E a ignição estiver acionada, ENTÃO, acenda a luz de advertência.

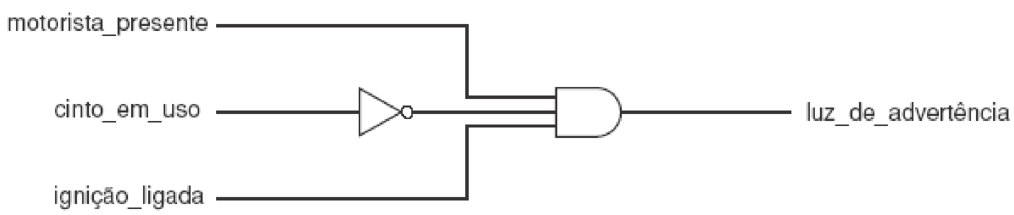
Descreva o circuito usando álgebra booleana, diagramas de símbolos lógicos, tabelas-verdade e diagramas de tempo.

Expressão booleana

$$\text{luz\_de\_advertência} = \text{motorista\_presente} \cdot \overline{\text{cinto\_em\_uso}} \cdot \text{ignição\_ligada}$$

(a)

Diagrama esquemático



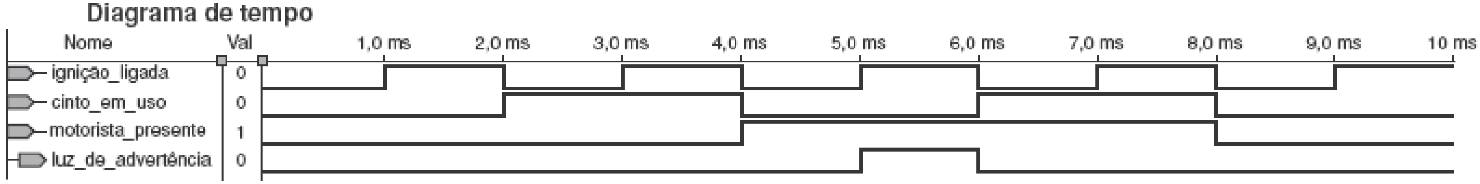
(b)

Tabela-verdade

motorista_presente	cinto_em_uso	ignição_ligada	luz_de_advertência
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

(c)

Diagrama de tempo



(d)

FIGURA 3.42

Métodos de descrever circuitos lógicos: (a) Expressão booleana; (b) Diagrama; (c) Tabela-verdade; (d) Diagrama de tempo.