Circuitos Lógicos Combinacionais (parte 2)

CPCX – UFMS

Slides: Prof. Renato F. dos Santos

Adaptação: Prof. Fernando Maia da Mota

4.5 Método do Mapa de Karnaugh

- **Método gráfico usado para simplificar uma equação lógica ou para converter uma tabela-verdade no seu circuito lógico correspondente**
- **Sua utilidade prática está limitada a cinco ou seis variáveis**
- **Nos restringiremos a problemas com de até quatro entradas**

4.5 Formato do mapa de Karnaugh

- **O mapa K, é um meio de mostrar a relação entre as entradas lógicas e a saída desejada**
- **A Figura 4.11 mostra três exemplos de mapas K**

A	B	X
0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}$
0	1	0
1	0	0
1	1	1 → AB

$$X = \bar{A}\bar{B} + AB$$

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	1	0
A	0	1

(a)

A	B	C	X
0	0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	1 → $\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1 → $AB\bar{C}$
1	1	1	0

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C}$$

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	1
$\bar{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\bar{B}$	0	0

(b)

A	B	C	D	X
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1 → $\bar{A}B\bar{C}D$
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1 → $AB\bar{C}D$
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1 → $ABCD$

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}D + ABCD$$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	0	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

(c)

FIGURA 4.11
Mapas de Karnaugh e tabelas-verdade para (a) duas, (b) três e (c) quatro variáveis.

4.5 Formato do mapa de Karnaugh (Continuação)

– **Esses exemplos ilustram os seguintes pontos importantes:**

1. **O mapa K fornece a mesma informação de uma tabela-verdade só que em um formato diferente. Cada quadrado no mapa K corresponde a uma linha da tabela-verdade.**
2. **Os quadrados do mapa K são nomeados de forma que quadrados adjacentes horizontalmente difiram apenas em uma variável. Da mesma forma acontece com quadrados adjacentes verticalmente.**

   Observe que cada quadrado da linha superior é considerado adjacente ao quadrado correspondente na linha inferior. Da mesma forma os quadrados da coluna mais à esquerda são adjacentes aos quadrados da coluna mais à direita.

4.5 Formato do mapa de Karnaugh (Continuação)

3. **Para que os quadrados adjacentes, tanto na vertical quanto na horizontal, difiram apenas de uma variável, as denominações de cima para baixo, têm de ser feitas na ordem mostrada. O mesmo se aplica as denominações de variáveis da esquerda para a direita.**
4. **Uma vez que um mapa K tenha sido preenchido com 0s e 1s, a expressão na forma de soma-de-produtos para a saída X pode ser obtida fazendo-se a operação OR dos quadrados que contém 1.**

Agrupamento de quadros

- **A expressão para a saída X pode ser simplificada combinando adequadamente os quadros do mapa K que contém 1**
- **O processo de combinação desses 1s é denominado *agrupamento***

Agrupamento de dois quadros (pares)

- **A Figura 4.12(a) é o mapa K para uma determinada tabela-verdade de três variáveis**
- **Vamos analisá-lo:**
  - **Contém um par de 1s adjacentes verticalmente;**
    - $\overline{A}B\overline{C}$
    - $AB\overline{C}$
  - **Nesses dois termos a variável *A* aparece na forma normal e complementada**
  - **Os dois termos podem ser agrupados resultando na eliminação da variável *A***

Agrupamento de dois quadros (pares)(Continuação)

- **Esse mesmo princípio é válido para qualquer par de 1s adjacentes vertical ou horizontalmente**
- **A Figura 4.12(b) mostra um exemplo de dois 1s adjacentes horizontalmente**
- **Os dois podem ser agrupados eliminando a variável *C***

Agrupamento de dois quadros (pares)(Continuação)

- **Outro exemplo é mostrado na Figura 4.12(c)**
- **As linhas superior e inferior de quadros são consideradas adjacentes**
- **Os dois 1s podem ser agrupados**

Agrupamento de dois quadros (pares)(Continuação)

- **A Figura 4.12(d) tem dois pares de 1s que podem ser agrupados**
- **Os dois 1s na linha superior são horizontalmente adjacentes**
- **Os dois 1s na linha inferior também são adjacentes**
- **Quando o par de 1s superior é agrupado, a variável *D* é eliminada**
- **Agrupando o par de 1s inferior, eliminamos a variável *C***
- **Esses dois termos são unidos por uma operação OR, resultando no valor final para X**

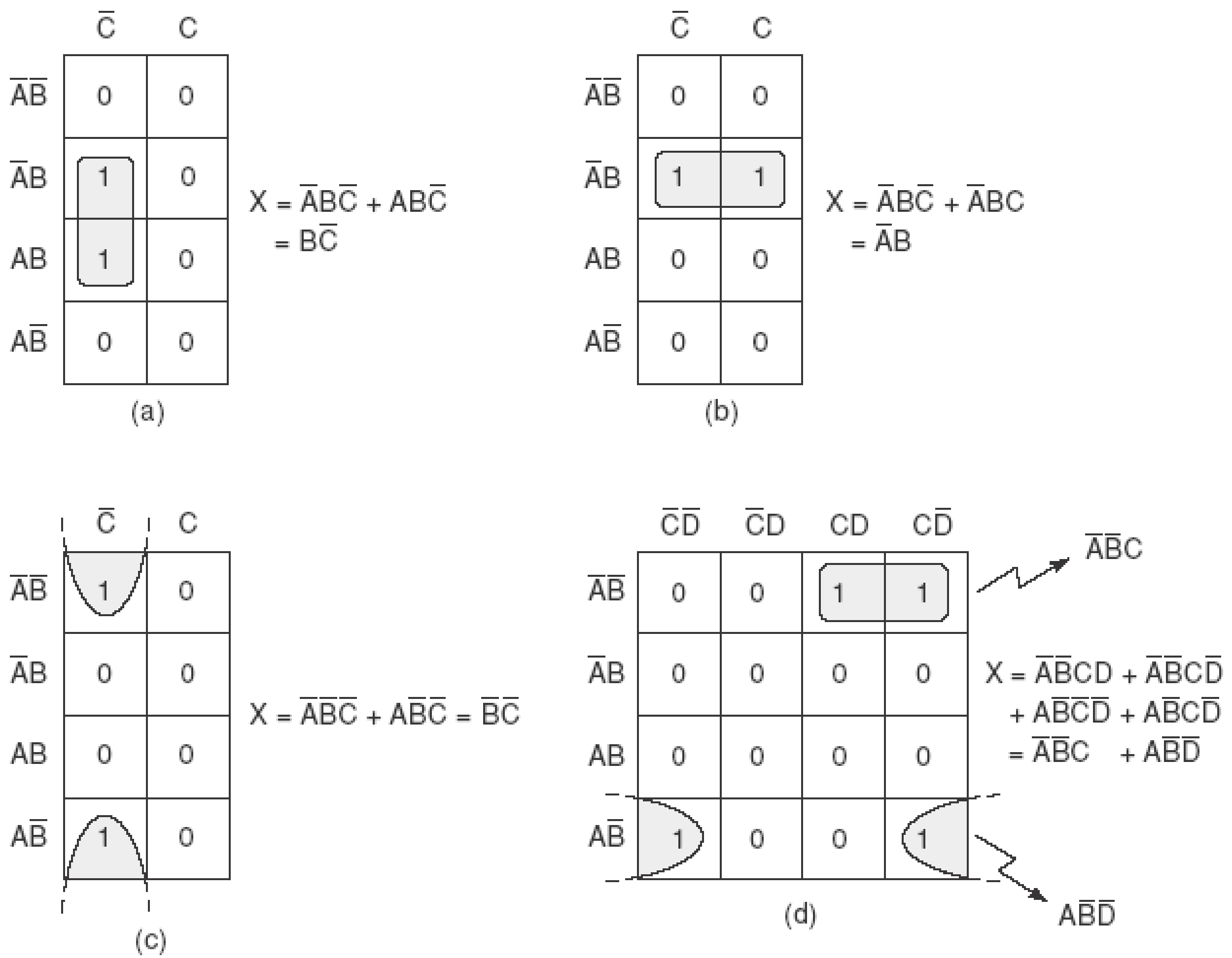


FIGURA 4.12 Exemplos de agrupamentos de pares de 1s adjacentes.

Agrupamento de dois quadros (pares)(Continuação)

- **Resumindo**
  - **Agrupando um par de 1s adjacentes em um mapa K, elimina-se a variável que aparece nas formas complementada e não-complementada.**

Agrupamento de quatro quadros (quartetos)

- Um mapa K pode ter um grupo de quatro 1s adjacentes entre si
- A Figura 4.13 mostra vários exemplos de quartetos
  - Na parte (a) da figura, os quatro 1s são adjacentes verticalmente
  - Na parte (b) os 1s são adjacentes horizontalmente
  - Na parte (c) contém quatro 1s formando um quadrado, sendo considerados adjacentes entre si
  - Os quatro 1s, na figura (d) também são adjacentes entre si, assim como os quatro 1s do mapa da figura (e)

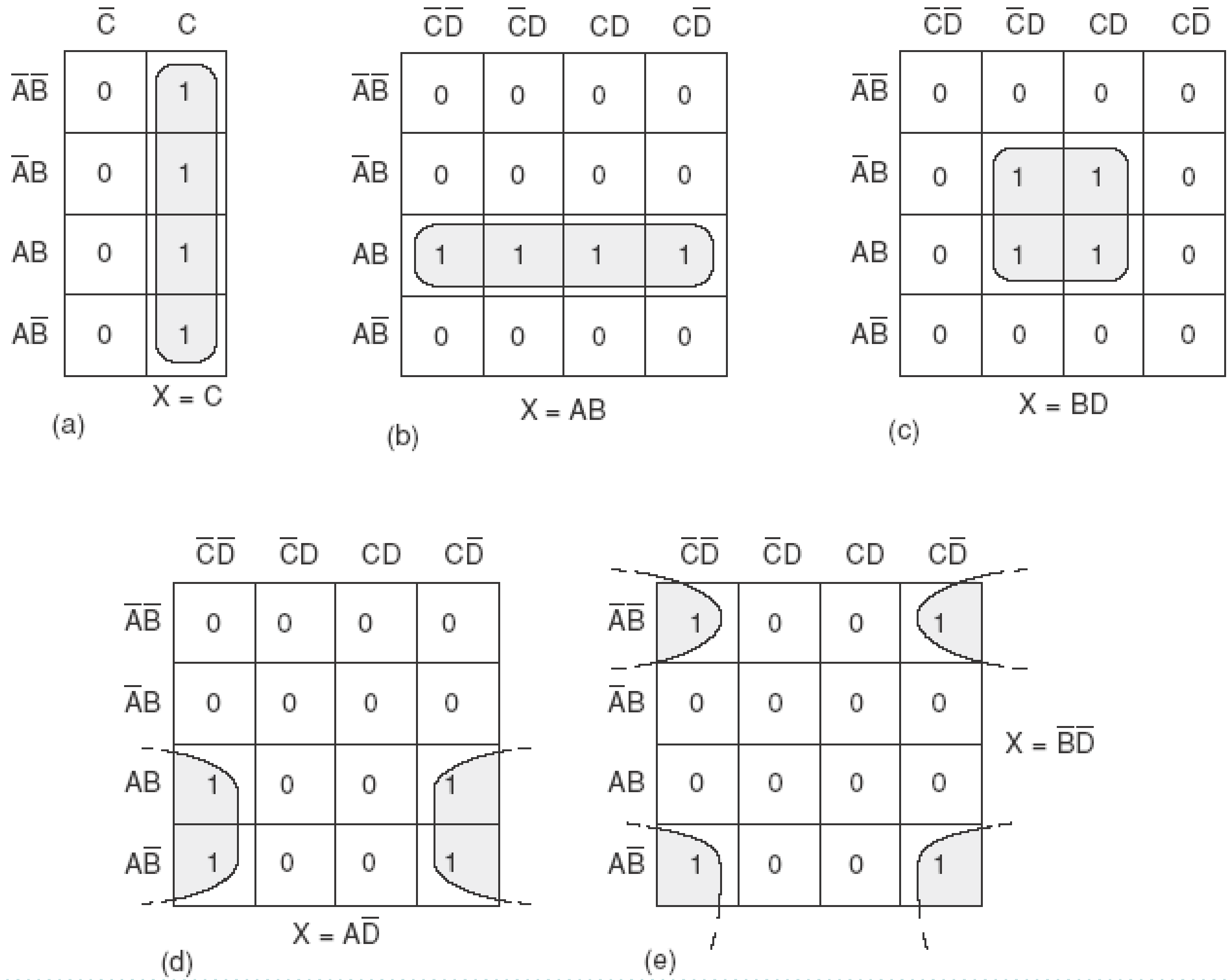


FIGURA 4.13
Exemplos de agrupamentos de quatro 1s (quartetos).

Agrupamento de quatro quadros (quartetos) (Continuação)

- **Resumindo**
  - **Agrupando um quarteto de 1s adjacentes, eliminam-se duas variáveis que aparecem nas formas complementada e não-complementada.**

Agrupamento de oito quadros (octetos)

- **Um grupo de oito 1s adjacentes entre si é denominado *octeto***
- **A Figura 4.14 mostra vários exemplos de octetos**
- **Quando um octeto é agrupado em um mapa de quatro variáveis, três das quatro variáveis são eliminadas**
- **Análise da Figura 4.14(a)**
  - **Mostra que apenas a variável *B* se mantém na mesma forma para todos os oito quadros: as outras variáveis aparecem na forma complementada e não-complementada**
  - **Para esse mapa X = *B***

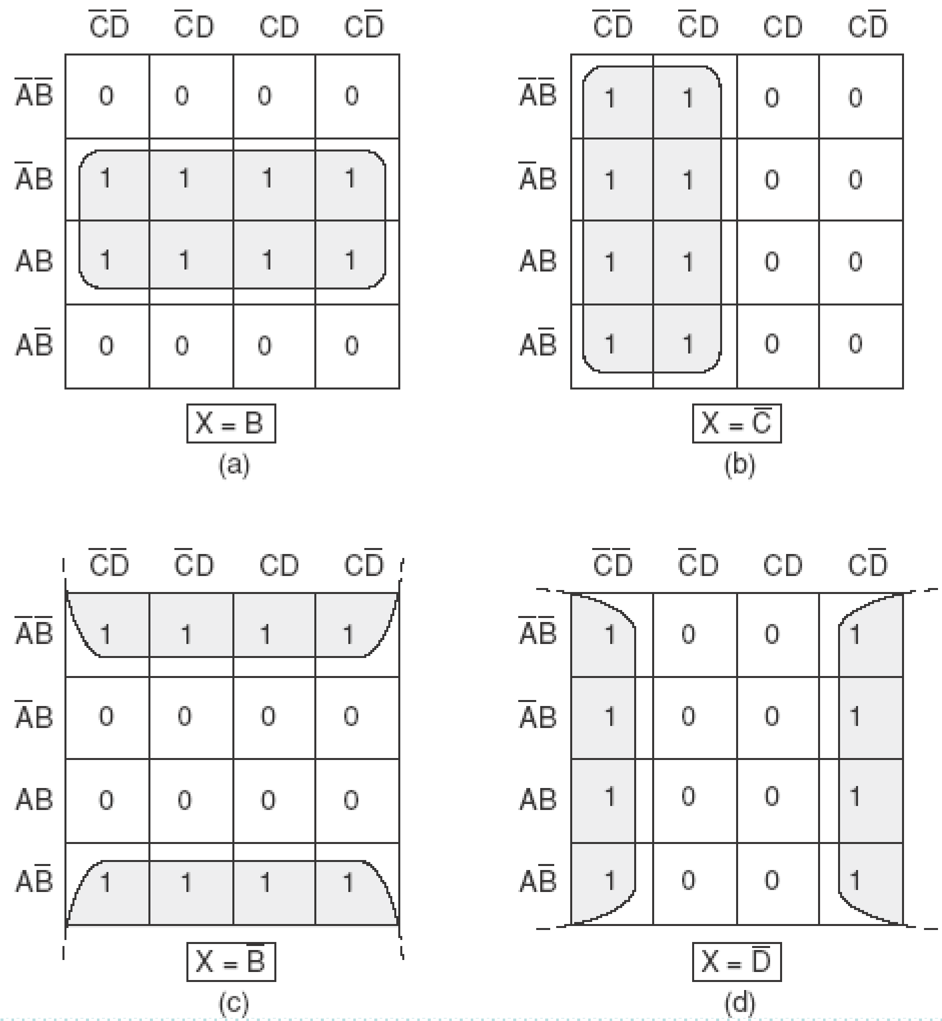


FIGURA 4.14
Exemplos de agrupamentos de oito 1s (octetos).

Processo completo de simplificação

- **Vimos como o agrupamento de pares, quartetos e octetos em um mapa K pode ser usado para obter uma expressão simplificada**
- **Podemos resumir as regras de agrupamento para grupos de qualquer tamanho:**
  - **Quando uma variável aparece nas formas complementada e não-complementada em um agrupamento, tal variável é eliminada da expressão. As variáveis que não se alteram para todos os quadros do agrupamento têm de permanecer na expressão final.**

Processo completo de simplificação (Continuação)

- **Um grupo maior de 1s elimina mais variáveis**
- **Com maior exatidão, um grupo de dois 1s elimina uma variável, um grupo de quatro 1s elimina duas variáveis e um grupo de oito 1s elimina três variáveis**
- **Esse princípio será usado agora para se obter a expressão lógica simplificada a partir do mapa K que contém qualquer combinação de 0s e 1s**

Processo completo de simplificação (Continuação)

- **O passos abaixo são seguidos no uso do mapa K para simplificação de uma expressão booleana**

1. **Construa o mapa K e coloque os 1s nos quadros que correspondem aos 1s na tabela-verdade. Coloque 0s nos outros quadros.**
2. **Analise o mapa quanto aos 1s adjacentes e agrupe os 1s que não sejam adjacentes a quaisquer outros 1s. Esses são denominados 1s isolados.**
3. **Em seguida, procure os 1s que são adjacentes a somente um outro 1. Agrupe todo par que contém tal 1.**
4. **Agrupe qualquer octeto, mesmo que ele contenha alguns 1s que já tenham sido agrupados.**

Processo completo de simplificação (Continuação)

5. **Agrupe qualquer quarteto que contenha um ou mais 1s que ainda não tenham sido agrupados, certificando-se de usar o menor número de agrupamentos.**
6. **Agrupe quaisquer pares necessários para incluir quaisquer 1s que ainda não tenham sido agrupados, certificando-se de usar o menor numero de agrupamentos.**
7. **Forme a soma OR de todos os termos gerados por cada grupo.**

Exemplo 4.10

– **A Figura 4.15(a) mostra um mapa K para um problema de quatro variáveis. Vamos supor que o mapa foi obtido a partir da tabela-verdade do problema (passo 1). Os quadrados estão numerados por conveniência para identificar cada grupo.**

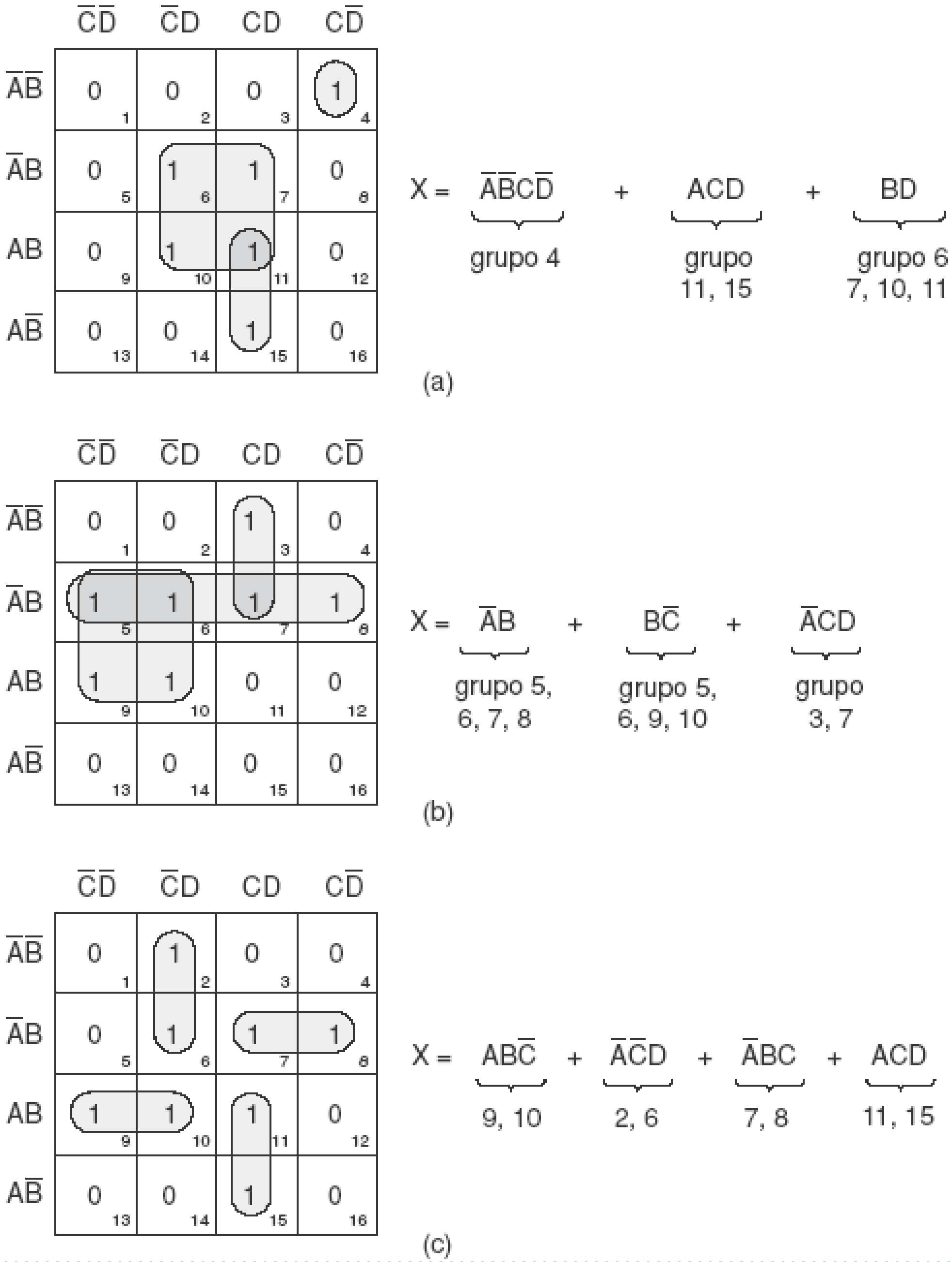


FIGURA 4.15
Exemplos 4.10 a 4.12.

Exemplo 4.10 (Continuação)

– **Passos:**

2. **O quadrado 4 é o único que contém um 1 que não é adjacente a qualquer outro 1. Ele é agrupado e denominado grupo 4.**
3. **O quadrado 15 é adjacente apenas ao quadrado 11. Esse par é agrupado e denominado grupo 11, 15.**
4. **Não há octetos.**
5. **Os quadrados 6, 7, 10 e 11 formam um quarteto. Esse quarteto é agrupado (grupo 6, 7, 10, 11). Observe que o quadrado 11 foi usado novamente, mesmo fazendo parte do grupo 11, 15.**
6. **Todos os 1s já estão agrupados.**
7. **Cada grupo gera um termo na expressão para X. O grupo 4 é simplesmente $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$. O grupo 11, 15 é ACD (a variável B foi eliminada). O grupo 6, 7, 10, 11 é BD (A e C foram eliminadas)**

Exemplo 4.11

- **Considere o mapa K na Figura 4.15(b). Mais uma vez vamos supor que o passo 1 tenha sido realizado.**
- **Passos:**

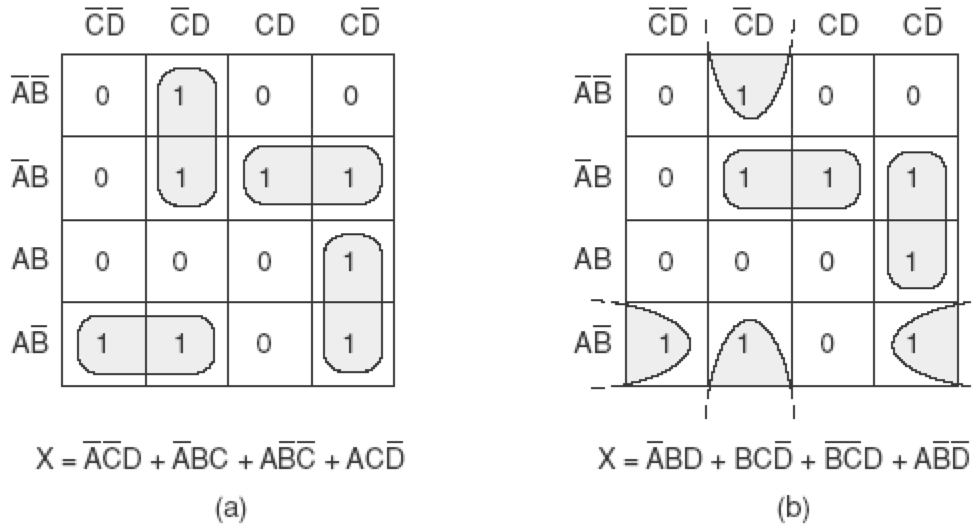
2. **Não há 1s isolados.**
3. **O 1 no quadro 3 é adjacente apenas ao 1 no quadro 7. O agrupamento desse par (grupo 3, 7) gera o termo $\overline{A}CD$.**
4. **Não há octetos.**
5. **Existem dois quartetos. O quadrados 5, 6, 7 e 8 formam um quarteto. O agrupamento desse quarteto gera o gera o termo $\overline{A}B$. O segundo quarteto e formado pelos quadrados 5, 6, 9 e 10, o qual é agrupado porque contém dois quadrados que não foram agrupados anteriormente. O agrupamento desse quarteto gera o termo $B\overline{C}$.**
6. **Todos os 1s já foram agrupados.**
7. **Os termos gerados pelos três grupos são unidos pela operação OR, obtendo-se a expressão para X.**

Exemplo 4.12

- **Considere o mapa K na Figura 4.15(c).**
- **Passos:**

2. **Não há 1s isolados.**
3. **O 1 no quadro 2 é adjacente apenas ao 1 no quadrado 6. Esse par é agrupado para gerar $\bar{A}\bar{C}D$. De forma similar, o quadrado 9 é adjacente apenas ao quadrado 10. Agrupando esse par, gera-se $AB\bar{C}$. Da mesma forma, o grupo 7, 8 e o grupo 11, 15 geram termos $\bar{A}BC$ e ACD respectivamente.**
4. **Não existem octetos.**
5. **Existe um quartetos formado pelos quadrados 6, 7, 10 e 11. Esse quarteto, entretanto, não é agrupado por que todos os 1s do quarteto já foram incluídos em outros grupos.**
6. **Todos os 1s já foram agrupados.**
7. **A expressão para X é mostrada na figura.**

FIGURA 4.16
O mesmo mapa K com duas soluções igualmente boas.



Exemplo 4.13

- **Considere o mapa K na Figura 4.16(a). Passos:**

2. **Não existem 1s isolados.**
3. **Não existem 1s que sejam adjacentes a apenas um outro 1.**
4. **Não existem octetos.**
5. **Não existem quartetos.**
6. **e**
7. **Existem muitos pares possíveis. O processo de agrupamento tem de usar o menor número de grupos para envolver todos os 1s. Para esse mapa há dois agrupamentos possíveis, que requerem apenas quatro agrupamentos de pares. A Figura 4.16(a) mostra uma solução e sua expressão resultante. A Figura 4.16(b) mostra a outra solução. Observe que as duas expressões têm a mesma complexidade; portanto, nenhuma é melhor do que a outra.**

Preenchendo o mapa K a partir da expressão de saída

– **Quando a saída desejada é apresentada como uma expressão booleana em vez de uma tabela-verdade, o mapa K pode ser preenchido usando os seguintes passos:**

1. **Passe a expressão para a forma de soma-de-produtos caso ela não esteja nesse formato.**
2. **Para cada termo produto da expressão na forma de soma-de-produtos, coloque um 1 em cada quadrado do mapa K cuja denominação seja a mesma da combinação das variáveis de entrada. Coloque um 0 em todos os outros quadrados.**

Exemplo 4.14

- Use um mapa K para simplificar $y = \overline{C}(\overline{A}\overline{B}\overline{D} + \overline{D}) + A\overline{B}C + \overline{D}$.
- Solução
  1. Multiplique o primeiro termos para obter $y = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{C}D + A\overline{B}C + \overline{D}$ que está agora na forma de soma-de-produtos.
  2. Para o termo $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ coloque simplesmente um 1 no quadrado $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ do mapa K (Figura 4.17). Para o termo $\overline{C}D$ coloque um 1 em todos os quadrados que têm nas suas denominações $\overline{C}D$, ou seja, $\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$, $\overline{A}B\overline{C}D$, $AB\overline{C}D$, $A\overline{B}\overline{C}D$. Para o termo $A\overline{B}C$ coloque um 1 em todos os quadrados que têm nas suas denominações $A\overline{B}C$, ou seja, $\overline{A}B\overline{C}D$, $AB\overline{C}D$. Para o termo $\overline{D}$ coloque um 1 em todos os quadrados que têm nas suas denominações $\overline{D}$, ou seja, todos os quadrados das colunas mais à esquerda e mais à direita.

FIGURA 4.17
Exemplo 4.14.

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1	0	1
$\overline{A}B$	1	1	0	1
AB	1	1	0	1
$A\overline{B}$	1	1	1	1

$$y = A\overline{B} + \overline{C} + \overline{D}$$

Exemplo 4.14 (Continuação)

– **O mapa K agora está preenchido e pode ser agrupado para as simplificações. Verifique que os agrupamentos adequados geram** $y = A\overline{B} + \overline{C} + \overline{D}$.

Condições de irrelevância (*don't-care*)

- **Existem certas combinações para os níveis de entrada em que é irrelevante (*don't-care*) se a saída é nível ALTO ou BAIXO**
- **O *x* representa a condição de irrelevancia (*don't-care*)**
- **Pode acontecer por várias razões, como por ex:**
  - **Combinações de entrada que nunca ocorrerão, sendo assim, não uma saída especificadas para tais condições.**
- **Um projetista de circuito está livre para fazer a saída ser 0 ou 1, podendo gerar uma expressão de saída mais simples**
- **Sempre que acontecerem situações de irrelevância, temos que decidir qual x será alterado para 0 qual será para 1, visando gerar a expressão mais simplificada no mapa K**

A	B	C	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	x
1	0	0	x
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\left.\begin{matrix}x\\x\end{matrix}\right\}$ irrelevante

(a)

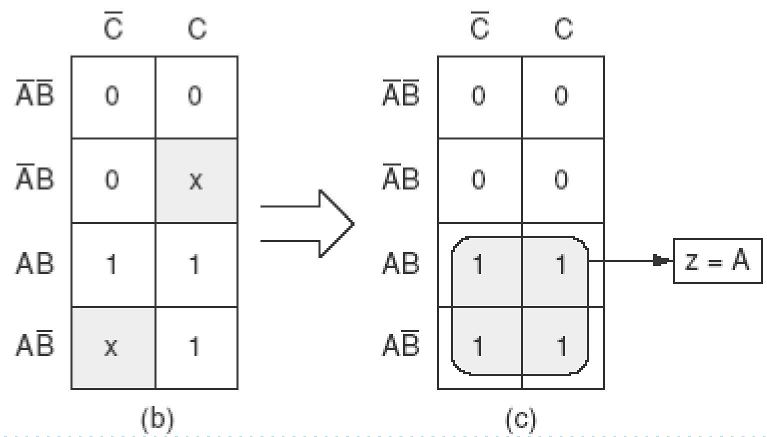
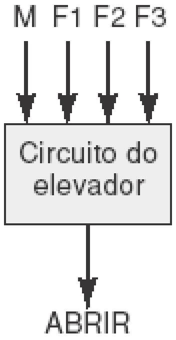


FIGURA 4.18
Condições de irrelevância devem ser alteradas para 0 ou 1 de forma a gerar agrupamentos no mapa K que produzam a expressão mais simples.

Exemplo 4.15

– **Vamos projetar um circuito lógico que controla uma porta de elevador em um prédio de três andares. O circuito na Figura 4.19(a) tem quatro entradas. *M* é um sinal lógico que indica quando o elevador está se movendo (*M* = 1) ou parado (*M* = 0). *F1*, *F2* e *F3* são os sinais indicadores dos andares que são normalmente em nível BAIXO, passando para nível ALTO, apenas quando o elevador estiver posicionado em um determinado andar. Por exemplo, quando o elevador estiver no segundo andar, *F2* = 1 e *F1* = *F3* = 0. A saída do circuito é o sinal ABRIR que normalmente é nível BAIXO e vai para o nível ALTO quando a porta do elevador tiver que ser aberta.**



(a)

M	F1	F2	F3	ABRIR
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	X
0	1	0	0	1
0	1	0	1	X
0	1	1	0	X
0	1	1	1	X
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	X
1	1	0	0	0
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

(b)

	$\overline{F2}\,\overline{F3}$	$\overline{F2}\,F3$	$F2\,F3$	$F2\,\overline{F3}$
$\overline{M}\,\overline{F1}$	0	1	X	1
$\overline{M}\,F1$	1	X	X	X
$M\,F1$	0	X	X	X
$M\,\overline{F1}$	0	0	X	0

(c)

	$\overline{F2}\,\overline{F3}$	$\overline{F2}\,F3$	$F2\,F3$	$F2\,\overline{F3}$
$\overline{M}\,\overline{F1}$	0	1	1	1
$\overline{M}\,F1$	1	1	1	1
$M\,F1$	0	0	0	0
$M\,\overline{F1}$	0	0	0	0

$$ABRIR = \overline{M}\,(F1 + F2 + F3)$$

(d)

FIGURA 4.19
Exemplo 4.15.

Exemplo 4.15 (Continuação)

– **Podemos preencher a tabela-verdade para a saída ABRIR [Figura 4.19(b)], conforme se segue:**

1. **Visto que o elevador não está em mais de um andar ao mesmo tempo, apenas uma das entradas relativas aos andares pode ser nível ALTO em um dado momento. Isso significa que todos aqueles casos da tabela-verdade em que mais de uma entrada relativa aos andares for nível 1 são condições de irrelevância. Podemos colocar um *x* na coluna da saída ABRIR para aqueles oito casos em que mais de uma entrada *F* for nível 1.**

Exemplo 4.15 (Continuação)

2. **Observando os outros oito casos, quando *M* = 1 o elevador se move, então a saída ABRIR tem de ser 0, pois não queremos que a porta do elevador abra. Quando *M* = 0 (elevador parado), queremos ABRIR = 1 proporcionada por uma das entradas, relativas aos andares, em nível 1. Quando *M* = 0 e todas as entradas relativas aos andares forem 0, o elevador está parado, mas não está adequadamente alinhado com qualquer andar, de forma que desejamos ABRIR = 0 para manter a porta fechada.**

Exemplo 4.15 (Continuação)

- **Com a tabela-verdade completa podemos transferir as informações para o mapa K [Figura 4.19(c)]**
- **Esse mapa tem três 1s e oito condições de irrelevância**
- **Quatro dos quadrados de irrelevância são alterados para 1**
- **Isso torna possível criar quartetos que contenha os 1s originais [Figura 4.19(d)]**
- **Os agrupamentos feitos geram a saída para a saída ABRIR mostrada**
- **Isso é o melhor que podemos fazer quanto à minimização da expressão de saída**

Resumo

- **O processo do mapa K tem várias vantagens sobre o método algébrico.**
  - **É um processo mais ordenado**
  - **Possui passos bem definidos**
  - **Normalmente requer menos passos, em especial para expressões que contenham muitos termos**
  - **Sempre gera uma expressão mínima**